可変振幅の静的sine-Gordon系の多重ソリトンとソリトン格子(ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,研究会報告)

山下, 譲

可変振幅の静的sine-Gordon系の多重ソリトンとソリトン格子

名大・工　山　下　　護

§1　序

次の自由エネルギーを有する体系を考える[1)]。

$$F=\int \mathrm{d}z\,[\,\frac{1}{2}A\rho^2+\frac{1}{4}\rho^4+\frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z})^2+\frac{1}{2}\rho^2(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}-1)^2$$

$$-\frac{1}{n}\Gamma\rho^n\sin n\phi\,] \tag{1}$$

これは，$n=1, 2$は電場並びに磁場中のカイラル・スメクティックC液晶，$n=3$は低次元金属の電荷密度波，$n=4, 6$は強誘電体$(NH_4)_2BeF_4$やK_2SeO_4などの整合・不整合転移に適用される。

平均場近似では，熱平衡状態はFを最小にする条件から求まるので，次のオイラー・ラグランジュ方程式の解である。

$$A\rho+\rho^3-\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}z^2}+\rho(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}-1)^2-\Gamma\rho^{n-1}\sin n\phi=0 \tag{2}$$

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}z^2}+2\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}-1)+\Gamma\rho^n\cos n\phi=0 \tag{3}$$

秩序パラメーターの振幅ρを一定と考えると，(3)式は時間に依存しないサイン・ゴルドン方程式となり，求積法によってこれらの相転移は論じられる[2)]。ρの変動をも考慮すると，ソリトン(ϕ-キンク)間の相互作用は引力的になることがあり，この場合，相転移は1次に転じる[3)]。以下，(2), (3)式の数値解析によって得られたρの変動に起因する解の諸性質について述べる。

§2　予備的考察

方程式(2), (3)より，Cを積分定数として，次の積分を得る。

$$\frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z})^2+\frac{1}{2}\rho^2(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z})^2=\frac{1}{2}(A+1)\rho^2+\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{n}\Gamma\rho^n\sin n\phi+C \tag{4}$$

(2), (3)式の一様解として，

$$\phi=(2m+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n}\,,\qquad \rho=\rho_0\,,\qquad (A+1)\rho_0+\rho_0^3-\Gamma\rho_0^{n-1}=0$$

が得られるが，ソリトン解は$n \to \pm\infty$の極限でこの一様解に漸近するので，ソリトン解や一様解に対してCは次式のC^*になる。

$$C^* = \frac{1}{4}\rho_0{}^4 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\Gamma\rho_0{}^n \tag{5}$$

ソリトンが存在するとして，ソリトンの一様解への緩和の様子を調べるために(2)，(3)式を線形化すると，固有値方程式を得る。固有値はA，Γの値の組に応じて実数，複素数および純虚数になる。実数の場合にはソリトンの緩和は指数減衰，複素数の場合には振動減衰になることを表わしている。また，純虚数の場合にはソリトンは存在しえない。

§3　結果

方程式(2)，(3)の倍精度ルンゲ・クッタ・ギル法による数値解析の結果は次の通りである。

線形方程式の固有値が実数の場合，ソリトンの励起エネルギーはρが一定の場合に比較して，ρの変動のため減小するが，それ以上新たな現象は見られず，相転移は２次転移である。

固有値が複素数の場合，およびソリトン格子解に関連する点については純虚数の場合も含めて，新たに見出された結果は以下の通りである。

(0)　ソリトン間の相互作用は引力的であり，相転移は１次である(これは既に知られていた[3])。

(1)　様様な1−ソリトン解が存在する。

(2)　多重ソリトン解（m−ソリトン）が存在し，$m \to \infty$の極限でソリトン格子（周期解）に繋がる。

(3)　多重ソリトン解で１つのソリトンと隣接するソリトンとの間の部分で振巾ρが非常に大きくなり，引力を生じる。

(4)　$\Delta C \leqq 0$（$\Delta C \equiv C - C^*$）でもソリトン格子解が存在する。

(5)　相転移は$\Delta C = 0$のソリトン格子と一様解の間で起る。（固有値が実である場合，２次転移であり転移点で$\Delta C = 0$である。しかし今の複素数の場合には$\Delta C = 0$のソリトン格子の格子間隔は有限であり，２次転移（格子間隔無限大に相当する）の場合と対比される。）

(6)　ソリトン密度が高い場合や低い場合（$|\Delta C|$が大きい場合）の周期解は不安定化し，カオティックになる。

(7)　ソリトン格子解ではρの変動が極めて大きい。ρが一定の場合の連続転移を理解するためマクミランによってディスコメンシュレイションという概念が導入されたが，今の場合はこの概念では理解されない（最も，１次転移であるので，エネルギー的考察だけでよい）。

§4　あと一言

上述の結果は数値解析であるので，解析的研究が今後望まれる。(1)式で1階微分項$\rho^2 d\phi/dz$が存在しない場合には積分が(5)式に加えもう一つ知られており体系は可積分となる[4]。今の場合には，ソリトン格子解の不安定化が認められており，不可積分であると考えられる。また，様様な実在の体系に適用するのも今後の課題である[5]。

文　献

1) M. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **74** (1985), 622.

2) P. G. de Gennes, Solid State Commun. **6** (1968), 163.
W. L. McMillan, Phys. Rev. **B14** (1976), 1496.

3) M. B. Walker and A. E. Jacobs, Phys. Rev. **B24** (1981), 6770.
P. Prelovsek, J. Phys. **C15** (1982), L269.
M. Yamashita and O. Tamada, J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985), 2963.

4) J. Hietarinta, Phys. Lett. **96A** (1983), 273.

5) M. Yamashita, Jpn. J. Appl. Phys.（第6回強誘電体国際会議（1985年8月於神戸）プロシーディング）.

Statics and Dynamics of Kink Solutions

東大・理　伊藤浩之，田崎晴明

§0. Introduction

Multi-componentのorder parmeterを持つ非線形な系のモデルとして，一次元非線形Klein-Gordon方程式に従うN成分スカラー場を考え，そこでのキンク解のstatic，dynamicな性質を調べることにする。

§1. Static Kink solutions

キンク解とは，場のlocal ポテンシャル$V(\phi)$の縮退したground stateを空間変化を持ってつなぐ有限の励起エネルギーを持つ解であり，具体的には，configuration energy $E(\phi)$［下式］の変分における極値点として定義される。